Untersuchungen

über das

Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse,

ausgehend von den in ihm enthaltenen Regelflächen.

Erzeugung mittelst linearer Komplexe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde in der Philosophie

unter dem Präsidium

des

Herrn Professors Dr. H. Seeliger.

Der philosophischen Fakultät in München

vorgelegt von

Robert Schumacher.

MÜNCHEN 1885.

G. Franz'sche h. b. Hof-Buchdruckerei (G. Emil Mayer).

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einteilung der Strahlensysteme allgemeiner Ordnung und Klasse.

§ 1. Regelflächen 7

§ 2. Das zugehörige Nullsystem 8

§ 3. Brennflächen:
Grad und Klasse der Brennfläche 11
Strahlensysteme ohne Kurven singulärer Punkte und Büschel singulärer Ebenen 12

Strahlensysteme dritter Ordnung und zweiter Klasse.

I. Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse von der Art $\varrho = 1$ 15

§ 4. Das zugehörige Nullsystem. — Doppelstrahlen. Hauptebenen. Schnitt des Nullsystems mit einer Ebene. Projektion von einem Punkte aus 15

§ 5. Regelflächen dritten und zweiten Grades in dem Strahlensysteme 17

§ 6. Erzeugung mittels linearer Komplexe 18

§ 7. Singularitäten 21

§ 7a. Weitere singuläre Punkte 23

§ 8. Das Strahlensystem Σ_1 24

§ 8a. Weitere Strahlensysteme 24
Anmerkung: Gleichungen des Systems . . . 25

§ 9. Stahl'sche Erzeugungsarten 26

§ 10. Erzeugung mittelst projektivischer Strahlensystembündel 27

§ 11. Brennfläche. — Grad und Klasse. Singuläre Ebenen der Brennfläche 28

Seite

§ 12. Die übrigen zur Brennfläche gehörigen Strahlensysteme 29

§ 13. Rückkehrkurve 31

§ 14. Erzeugung der Brennfläche und ihrer Rückkehrkurve durch Flächen 2ten Grades 33

§ 15. Unterart 38

II. Strahlensysteme 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 2$ 39

III. Strahlensysteme 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 0$. — Unterart 42

Die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung nehmen ihren Ausgang von der Betrachtung der Regelflächen, welche von den eine beliebige Gerade im Raume schneidenden Strahlen der Strahlensysteme gebildet werden. Jeder Geraden als Axe eines Ebenenbüschels ist durch eine solche Regelfläche eine Kurve zugeordnet, welche eine vielfache Leitlinie dieser Fläche ist. Beschreibt die Gerade ein Bündel durch einen Punkt, so erzeugt ihre zugehörige Kurve eine Fläche. Jedem Punkte im Raume ist auf diese Weise eine Fläche zugewiesen. Dasselbe gilt reciprok von jeder Ebene. Man findet so zu jedem Strahlensystem ein zugehöriges Nullsystem*) höherer Ordnung. Das Strahlensystem bildet ein Leitstrahlensystem desselben.

Im Folgenden geben wir zuerst eine Einteilung der Strahlensysteme allgemeiner Ordnung nach dem Werte des Moduls ihres zugehörigen Nullsystems. Wir schliessen hiebei diejenigen Strahlensysteme von der Betrachtung aus, deren Regelflächen im Allgemeinen ausser ihren zugeordneten Geraden noch Leitlinien von höherer Vielfachheit als der zweiten besitzten. Die Anwendung der Klassifikation auf die Strahlensysteme dritter Ordnung und zweiter Klasse ergibt 3 Arten derselben. Die

---

*) Ueber die Geometrie der Nullsysteme she.: Ameseder, Wiener Sitzungsberichte 2. Abt. Febr. 1881.

Sturm: Ueber die reciproke und mit ihr zus. Verwand. Math. Ann. B XIX. 461.

Ameseder. Das allgemeine räumliche Nullsystem. Crelle 97. 63.

Aufsuchung der Regelflächen niedrigeren Grades im Strahlensysteme dritter Ordnung und zweiter Klasse mit eigentlicher Brennfläche und die Verbindung derselben unter einander durch lineare Komplexe führt uns auf eine Erzeugung dieses Systems mittelst dreier Büschel linearer Komplexe. Wir zeigen dann, wie sich aus dieser Erzeugung die bekannten Eigenschaften des Systems ergeben; hiebei schliessen wir uns hauptsächlich der Abhandlung von Herrn Stahl an „das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse“ (Crelle. Bd. 91. p. 1).

Die erste rein synthetische Behandlung der Strahlensysteme ist von Herrn Reye gegeben worden. Herr Reye untersuchte die Strahlensysteme zweiter Ordnung und n^{ter} Klasse im Zusammenhange mit dem Gebüsche von Flächen 2ten Grades. Speziell das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse findet sich in der oben angeführten Abhandlung von Herrn Stahl auf synthetischem Wege untersucht. In einer späteren Abhandlung „das Strahlensystem 4ter Ordnung und 2ter Klasse“ (Crelle. 97. p. 147) behandelt Herr Stahl das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse als einen speziellen Fall des Strahlensystems 4ter Ordnung.

Einteilung der Strahlensysteme allgemeiner Ordnung und Klasse.

§ 1. Regelflächen.

1. Die Strahlen eines Strahlensystems $\Sigma_{n,k}$ von der n^{ten} Ordnung und k^{ten} Klasse, welche eine beliebige Gerade g im Raume treffen, bilden im Allgemeinen eine Regelfläche vom $n + k^{ten}$ Grade. g ist n-fache Leitlinie derselben und zugleich Axe eines Büschels von k-fachen Tangentialebenen. — Bezeichnen wir diese Regelflächen kurz mit R_{n+k}.

2. Hat jede R_{n+k} i. Allg. δ Doppelerzeugende, so gibt es eine Regelfläche D_δ vom Grade δ, welche von Doppelstrahlen des Systems erzeugt wird.

3. In jeder Ebene durch g befinden sich $\frac{k\,(k-1)}{2}$ Schnittpunkte der Erzeugenden von R_{n+k}. Liegen μ derselben auf g, so besitzt R_{n+k} i. Allg. eine Doppelkurve C_g von der Ordnung $\frac{k\,(k-1)}{2} + \varrho$, wobei $\varrho = \mu - \delta$.

4. Ebenso hat R_{n+k} i. Allg. einen Büschel von Doppelebenen E_g von der Ordnung $\frac{n\,(n-1)}{2} + \varrho$.

5. C_g kann von keinem höhern Grade sein als vom Grade $\frac{(n+k-1)\,(n+k-2)}{2} - \frac{n\,(n-1)}{2}$. Der höchste Wert, den ϱ besitzen kann, ist daher: $\frac{(n+k-1)\,(n+k-2)}{2} - \frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{k\,(k-1)}{2} = nk - (n+k) + 1$.

6. Wir schliessen im Folgenden diejenigen Strahlensysteme von der Betrachtung aus, deren Regelflächen R_{n+k} Kurven höherer Vielfachheit als der zweiten besitzen.

7. Der Grad von C_g bleibt bei stetigem Uebergang von einer R_{n+k} zur andern unverändert. Wir können daher die Strahlensysteme nach dem Werte dieses Grades einteilen und wollen ϱ die Art des Strahlensystems nennen. ϱ gibt an, wie oft es i. Allg. vorkommt, dass zwei einfache Strahlen mit der beliebigen Geraden g in einer Ebene liegen und zugleich durch einen Punkt gehen. Die Schnitte von D_δ mit g sind hiebei nicht gerechnet.

Schneiden sich λ Strahlen, welche mit g in einer Ebene liegen, in einem Punkte von g, so ist dieser Fall $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ mal zu rechnen.

§ 2. Das zu $\Sigma_{n,k}$ gehörige Nullsystem.*)

1. Ordnen wir jedem Punkte im Raume die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungsebenen der durch ihn gehenden Strahlen zu, so entsprechen auch jeder Ebene die $\frac{k(k-1)}{2}$ Schnittpunkte der in ihr gelegenen Strahlen. Den Ebenen durch eine beliebige Gerade g entsprechen die Punkte der Kurve C_g von der Ordnung $\frac{k(k-1)}{2}+\varrho$ und den Punkten auf g die Ebenen des Raumbüschels E_g von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}+\varrho$. Die Punkte, welche bei dieser Zuordnung allen Ebenen durch einen Punkt P entsprechen, bilden eine Fläche F_p vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}+\varrho$. Ebenso umhüllen die Ebenen, welche den Punkten einer Ebene ε entsprechen, eine Fläche φ_ε von der Klasse $\frac{k(k-1)}{2}+\varrho$.

*) Für das Folgende vrgl. Ameseder „Das allg. räuml. Nullsystem zweiten Grades". Crelle. Bd. 97. p. 63.

Die Strahlen von $\Sigma_{n,k}$, welche durch P gehen resp. in ε liegen, sind $(n-1)$-fache Linien von F_p resp. $(k-1)$-fache Axen von $\varphi\varepsilon$.

Besteht C_g aus Kurven geringerer Ordnung, so besteht auch $\varphi\varepsilon$ aus ebensovielen Flächen niedrigerer Klasse. Die Summe der Klassen dieser Flächen bleibt in unserm Falle immer $\frac{k(k-1)}{2} + \varrho$. Enthält E_g ein Büschel λ-facher Ebenen von R_{n+k}, so enthält F_p eine Fläche, welche $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ mal gerechnet ist. Hat das Büschel die Ordnung ν, so beträgt der Gesamtgrad der Flächen, aus denen F_p besteht, nur $\frac{n(n-1)}{2} + \varrho - \left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - 1\right] \times \nu$.

„Ein Strahlensystem n^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse von der Art ϱ, dessen Regelflächen R_{n+k} i. Allg. keine Kurven höherer Vielfachheit als der zweiten besitzen, bestimmt ein Nullsystem von der Klasse $\frac{k(k-1)}{2} + \varrho$, wobei ϱ der Modul desselben ist.“

2. Auf jeder Ebene an $\varphi\varepsilon$ liegen ausser ihrem zugeordneten Punkte auf ε noch $\frac{k(k-1)}{2}$ zugeordnete Punkte. Die Gesamtheit dieser Punkte für alle Tangentialebenen von $\varphi\varepsilon$ bilden eine Fläche f. Jeder Punkt von f, welcher in einer zweiten Ebene ε_1 liegt, hat i. Allg. eine zugeordnete Ebene, die $\varphi\varepsilon$ berührt. Von dieser Ebene liegt ein zugeordneter Punkt in ε und ein anderer auf ε_1. Die Ebenen an $\varphi\varepsilon$, welche den Punkten des Schnitts von ε_1 mit f zugeordnet sind, bilden den Büschel der gemeinsamen Tangentialebenen von $\varphi\varepsilon$ und $\varphi\varepsilon_1$ ausser E_g. Die Anzahl der Schnittpunkte von ε_1, f und einer beliebigen F_p gibt die Ordnung dieses Büschels.

Der Schnitt von ε selbst mit der Fläche f bestimmt einen Büschel von Doppeltangentialebenen an $\varphi\varepsilon$. Dieses Büschel wird von ε in den Strahlen desjenigen Komplexes geschnitten, den die Gesamtheit der Verbindungslinien der jeder Ebene des Raums entsprechenden Punkte bilden.

3. Jeder Doppelstrahl von $\Sigma_{n,k}$, welcher nicht auf D_δ liegt, befindet sich auf allen Fp und ist allen φ_ε als Axe gemeinsam.

4. Der Büschel gemeinsamer Tangentialebenen zweier Flächen des Nullsystems φ_ε und φ_{ε_1} besteht 1) aus dem Büschel E_g, welcher der Geraden $\overline{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ zugeordnet ist, 2) aus dem Büschel $E_\varepsilon^{\varepsilon_1}$, dessen Ebenen zwei verschiedene zugeordnete Punkte, den einen in ε den andern in ε_1, haben, 3) den Büscheln durch die Doppelstrahlen, welche nicht auf D_δ liegen, 4) einem Büschel E^s singulärer Ebenen von $\Sigma_{n,k}$.

5. Ist ein Punkt H allen Cg gemeinsam, so entsprechen ihm im Nullsystem alle durch ihn gehenden Ebenen. H ist ein singulärer Punkt höherer Ordnung d. h. die Strahlen von $\Sigma_{n,k}$, welche durch H gehen, bilden Strahlenbüschel von höherer Ordnung als der ersten. Denn in jeder Ebene durch H liegen mindestens 2 Strahlen, die sich in H schneiden. Herr Ameseder nennt solche Punkte „Hauptpunkte des Nullsystems".

6. Jeder singuläre Punkt höherer Ordnung ist umgekehrt auch ein Hauptpunkt des Nullsystems. Man sieht leicht, dass er jeder Cg angehört.

Jede singuläre Ebene höherer Ordnung ist eine Hauptebene.

7. Eine Kurve von singulären Punkten höherer Ordnung resp. ein Büschel singulärer Ebenen höherer Ordnung ist jeder Cg resp. jedem Eg als Teil gemeinsam.

Liegt eine Kurve Cs / Berührt ein Büschel Es } von einfachen singulären { Punkten / Ebenen

auf allen Fp / alle φ_ε } und { ist eine k-fache Linie / besteht aus k-fachen Berührungsebenen } derselben,

so entsprechen jedem { ihrer Punkte / seiner Ebenen } k { Ebenenbüschel / Punktreihen } erster

Ordnung, deren { Axen / Träger } Strahlen von $\Sigma_{n,k}$ sind.

Ein einfacher singulärer Punkt resp. eine einfache singuläre Ebene liegt nur dann auf allen Fp resp. berührt alle φ_ε wenn

es ausser dem Strahlenbüschel 1ter Ordnung, welcher durch den Punkt geht resp. in der Ebene liegt, noch Strahlen von $\Sigma_{n,k}$ gibt, die durch den Punkt gehen, resp. in der Ebene liegen.

§ 3. Brennflächen.

Grad und Klasse der Brennfläche.

Die Brennfläche wird von allen Punkten gebildet, in welchen sich zwei unendlich benachbarte Strahlen schneiden, und von allen Ebenen umhüllt, welche zwei unendlich benachbarte Strahlen enthalten. Gehen die Strahlen eines Systems $\Sigma_{n,k}$ durch die Punkte einer Kurve, so ist diese als eine Brennfläche vom Grade 0 zu betrachten. Ist die Kurve von der Klasse t und sind ihre Punkte singuläre Punkte von der r^{ten} Ordnung, so ist die Kurve als eine Brennfläche von der Klasse rt zu rechnen. In jeder ihrer Tangentialebenen liegen nämlich r Paare unendlich benachbarter Strahlen. Ebenso kann jede developpable Fläche vom Grade q, welche von singulären Ebenen der Ordnung p eingehüllt wird, als Brennfläche vom Grade pq und der Klasse o angesehen werden.

Um die Klasse der Brennfläche von $\Sigma_{n,k}$ zu bestimmen, schneiden wir die zu einer Geraden g — g sei kein Strahl von $\Sigma_{n,k}$ — gehörige R_{n+k} durch eine Ebene nach der Kurve C_{n+k}. Jede eigentliche Tangentialebene, welche von g an C_{n+k} geht und C_{n+k} nicht in ihrem Schnitte mit g berührt, enthält zwei unendlich benachbarte Strahlen von R_{n+k}, ist also Brennebene.

Ist $\Sigma_{n,k}$ von der Art ϱ und hat eine Regelfläche von Doppelstrahlen D_δ vom Grade δ, so besitzt C_{n+k} ausser ihrem n-fachen Punkte auf g noch $\frac{k(k-1)}{2} + \varrho + \delta$ Doppelpunkte, ist also von der Klasse: $(n+k)(n+k-1) - n(n-1) - k \times (k-1) - 2\varrho - 2\delta = 2nk - 2\varrho - 2\delta$.

Durch g gehen somit $2nk - 2\varrho - 2\delta - 2n = 2n(k-1) - 2\varrho - 2\delta$ Tangentialebenen, welche C_{n+k} nicht in ihrem Punkte auf g berühren. Wir haben also den Satz.

Ein Strahlensystem n^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse von der Art ϱ hat im Allgemeinen eine Brennfläche von der Klasse $2n(k-1)-2\varrho-2\delta$ und dem Grade $2k(n-1)-2\varrho-2\delta$.

Den Grad der Brennfläche erhalten wir durch das reciproke Verfahren.

Strahlensysteme ohne Kurven singulärer Punkte und Büschel singulärer Ebenen.

Drei Strahlen von $\Sigma_{n,k}$, welche zugleich in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen, mögen ein Strahlentripel heissen, ihr Schnittpunkt ein Tripelpunkt und ihr Träger eine Tripelebene. Bedeutet τ die Anzahl der Strahlentripel, welche i. Allg. einen und denselben beliebigen Strahl s enthalten, so lässt sich, wenn $\Sigma_{n,k}$ nur eine bestimmte Anzahl singulärer Punkte und Ebenen besitzt, für die Art ϱ ein Ausdruck in n, k und τ finden (die Schnittpunkte von s mit der Doppelstrahlenfläche D_δ seien unter τ nicht eingerechnet). Die Regelfläche R^s_{n+k}, welche s zur Leitgraden hat, besitzt eine Doppelkurve Cs, welche in jeder Ebene durch s $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ nicht auf s liegende Punkte hat. Auf s selbst liegen τ Punkte von Cs, in welchen sich im Allg. zwei von s verschiedene Strahlen schneiden. Die übrigen Punkte von Cs, welche auf s liegen, sind die $2(k-2)$ Schnittpunkte von s mit den Strahlen, welche in den beiden Brennebenen sich befinden. Cs ist daher von der Ordnung

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2}+\tau+2(k-2).$$

In dem Nullsystem von $\Sigma_{n,k}$ gehen an jede Fläche φ_ε von jedem Strahle s im Ganzen $n-1+\tau+2(k-2)+\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ Tangentialebenen. Denn einmal liegen in der der φ_ε entsprechenden Ebene E $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+\tau+2(k-2)$ Schnittpunkte mit Cg, deren Verbindungsebenen mit s ihnen zugeordnet sind. Dann gehen durch s noch $n-1$ Ebenen, welche dem Punkte $(\varepsilon\ s)$ entsprechen. Sonst gehen durch s

keine Ebenen mehr an φ_ε und offenbar sind dies auch einfache Tangentialebenen von φ_ε. Wie wir wissen, ist φ_ε von der Klasse $\frac{k(k-1)}{2} + \varrho$ (wir haben vorausgesetzt, dass die Regelflächen von $\Sigma_{n,k}$ i. Allg. keine Kurve von höherer Vielfachheit als der zweiten enthalten).

Dies gibt die Gleichung:

$$\frac{k(k-1)}{2} + \varrho = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \tau + 2(k-2) + n - 1$$

Hieraus erhält man für $\varrho : \varrho = n + k - 4 + \tau$.

„Die Brennfläche eines Strahlensystems n^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse ohne Kurven singulärer Punkte oder Büschel singulärer Ebenen ist vom Grade $2k(n-1) - 2(n+k) + 8 - 2\tau - 2\delta$ und von der Klasse $2n(k-1) - 2(n+k) + 8 - 2\tau - 2\delta$."

Der Satz gilt unter der angeführten Voraussetzung.

Die Tripelpunkte von $\Sigma_{n,k}$ bilden i. Allg. eine Fläche Tp, welche in dem Falle $n = 3$ vom Grade τ ist. Hier muss nämlich jeder Strahl dem Tripel eines jeden seiner Schnittpunkte mit Tp angehören. Ist $n > 3$, so gehen durch jeden Punkt von Tp i. Allg. noch $n - 3$ Strahlen, welche dem Tripel desselben nicht angehören. Der Grad von Tp ist daher im Allgemeinen grösser als τ. Für $n = 2$ oder $k = 2$ muss $\tau = 0$ sein. Die Ebenen der Tripelstrahlen umhüllen i. Allg. eine Fläche T_ε. Geht durch jeden Tripelpunkt nur ein Strahlentripel und liegt in jeder Tripelebene nur eins, so sind die Flächen Tp und T_ε so auf einander durch das Strahlensystem bezogen, dass jeder Punkt auf Tp in der ihm entsprechenden Ebene an T_ε liegt und umgekehrt. — Gehört ein Strahl s einer Gruppe von r Strahlen an, die mit ihm in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen, so ist diese Gruppe als $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ Tripel unter den τ zu s gehörigen zu rechnen.

Die Doppelstrahlen-Fläche D_δ kann als Fläche von Tripelpunkten und Tripeltangentialebenen betrachtet werden.

Die Fälle, in welchen jeder Punkt des Raums ein Tripelpunkt ist, sind hier von der Behandlung ausgeschlossen, da

hier jede R_{n+k} i. Allg. mindestens eine dreifache Kurve besitzt. Die Tripelpunkte und Tripelebenen bilden in diesem Fall ein Nullsystem.

Aus dem Vorigen folgt für $k = 2$:

1. Die Strahlensysteme n^{ter} Ordnung und 2ter Klasse mit einer eigentlichen Brennfläche sind von der Art $\varrho = n - 2$.
2. Ihre Brennfläche ist von der Klasse 4 und dem Grade 2n.

Da bei den Strahlensystemen n^{ter} Ordnung und 2ter Klasse in jeder Ebene durch eine beliebige Gerade g nur ein Schnittpunkt von Erzeugenden der zugehörigen R_{n+k} liegt, kann hier nicht jede R_{n+k} i. Allg. eine Kurve höherer Vielfachheit als der zweiten enthalten. Die Strahlensysteme n^{ter} Ordnung und 2ter Klasse gehören somit sämtlich zu den vorhin betrachteten Kongruenzen.

Strahlensysteme dritter Ordnung und zweiter Klasse.

Die Klassifikation der Strahlensysteme 3ter Ordnung und 2ter Klasse nach dem Grade der auf ihren Regelflächen R_5 i. Allg. enthaltenen Doppelkurven ergibt 3 Arten:

I. R_5 besitzt eine gerade Doppellinie als Leitlinie: $\varrho = 0$.

II. R_5 enthält eine Doppelkurve 2ten Grads, welche g in einem Punkte schneidet: $\varrho = 1$.

III. R_5 enthält eine doppelte Raumkurve dritter Ordnung, welche g in 2 Punkten trifft: $\varrho = 2$.

Da jede der R_5 i. Allg. noch Doppelerzeugende besitzen kann, so erhalten wir zu I noch die Unterarten: 1) R_5 hat ausser der doppelten Leitgeraden noch eine ($\delta = 1$) oder 2) zwei Doppelerzeugende ($\delta = 2$). Zu II kommt noch die Unterart: R_5 hat eine Doppelerzeugende ($\delta = 1$).

Bemerkung: Wir haben die Strahlensysteme nach dem Wert von ϱ und nicht von $\varrho + \delta$ eingeteilt, weil der Wert von δ ohne Einfluss auf Grad und Klasse der zugehörigen Nullsysteme ist. Ist nämlich k die Klasse des Strahlensystems, so zerfällt jede Fläche $\varphi\varepsilon$ des zugehörigen Nullsystems in eine Fläche von der Klasse $\frac{k(k-1)}{2} + \varrho$ und die Doppelstrahlenfläche $D\delta$.

Untersuchen wir zuerst das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 1$, als das wichtigste.

I. Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse von der Art $\varrho = 1$.

Die Regelflächen R_5 sollen im Allg. keine Doppelerzeugende besitzen: $\delta = 0$.

Die Brennfläche des Strahlensystems ist vom Grade 4 und der Klasse 6. Die Strahlensysteme mit einer eigentlichen Brennfläche gehören hieher.

§ 4. Das zugehörige Nullsystem.*)

Das Strahlensystem bestimmt ein Nullsystem von der Klasse 2 und der Ordnung 4. Jeder Ebene ε entspricht eine Fläche $\varphi\varepsilon^2$ und jedem Punkte P eine Steiner'sche Fläche Fp^4. Die Strahlen in ε liegen auf $\varphi\varepsilon^2$ und die Strahlen durch P sind die drei Doppellinien der Steiner'schen Fläche Fp^4. Den Punkten jeder Geraden g entsprechen die Ebenen des Büschels Eg von der 4ten Ordnung.

Doppelstrahlen: Allgemein hat jedes Strahlensystem n^{ter} Ordnung und 2ter Klasse mit einer eigentlichen Brennfläche $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Doppelstrahlen.**)

Die Flächen $\varphi\varepsilon$, welche in dem zugehörigen Nullsystem jedesmal den Ebenen des Raumes entsprechen, sind, da in unserm Falle $\varrho = n-2$, von der Klasse $n-1$. Der Büschel E der gemeinsamen Tangentialebenen von zwei Flächen $\varphi\varepsilon$ und $\varphi\varepsilon_1$, welche den Ebenen ε und ε_1 entsprechen, ist von der Ordnung $(n-1)^2$. Der Schnittgeraden von ε und ε_1 entspricht ein Büschel von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2} + n - 2$, welches in E enthalten ist. Da jeder Ebene im Nullsystem nur ein Punkt entspricht,

*) Stahl „Das Strahlens. 4ter Ordn. u. 2ter Kl.“ Crelle, 97, p. 147. Schluss d. Abth.

**) Dieser Satz in der reciproken Form ist von Kummer. Abhandl. d. Berl. Ak. 1866. „Algebraïsche Strahl.“ Satz XXIV.

so existiert i. Allg. kein Büschel von Ebenen der Beschaffenheit, dass einer ihrer zugeordneten Punkte auf ε und ein anderer von diesem verschiedener auf ε_1 liegt. Ebenso gibt es kein Büschel singulärer Ebenen. Die übrigen gemeinschaftlichen Tangentialebenen müssen daher $(n-1)^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2} + (n-2)\right]$ Büschel 1ter Ordnung bilden, deren Axen Doppelstrahlen des Systems sind. Das Strahlensystem hat also

$$(n-1)^2 - n\frac{(n-1)}{2} - (n-2) = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$$

Doppelstrahlen.

Das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse mit einer eigentlichen Brennfläche besitzt also keinen Doppelstrahl.

Bemerkung: Die von Herrn Kummer in der Abhandlung „algebraïsche Strahlensysteme“ (Abhandl. der Berliner Ak. 1866) gebrauchten Bezeichnungen $P = o$, $Q = o$, $R = o$ für Ausdrücke $n-1^{ten}$ Grads repräsentieren offenbar für den reciproken Fall die Gleichungen dreier Flächen des zum betreffenden Strahlensystem gehörigen Nullsystems.

Hauptebenen: Irgend 3 Flächen $\varphi\varepsilon^2$, welche in dem zum Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse gehörigen Nullsystem dreier Ebenen zugeordnet sind, haben 8 gemeinsame Tangentialebenen. 3 davon entsprechen dem Schnittpunkte der drei Ebenen. Die übrigen 5 Ebenen haben alle ihre Punkte zugeordnet und sind Hauptebenen des Nullsystems, also singuläre Ebenen höherer Ordnung. Sie sind von der zweiten Ordnung. Denn jeder derselben — bezeichnen wir sie ferner mit $\varepsilon\iota^0$ — kann eine R_5 nur nach 2 Erzeugenden schneiden, da sie ihre Doppelkurve nur in 2 Punkten trifft.

Schnitt des zugehörigen Nullsystems mit einer Ebene: Die Schnitte g_ε der Ebenen, welche den Punkten einer Ebene ε entsprechen, mit dieser Ebene sind durch das Nullsystem so auf die Punkte P_ε in ε bezogen, dass jeder g_ε ein auf ihr liegender P_ε entspricht und jedem P_ε drei durch ihn gehende g_ε zugeordnet sind. Den Punkten P_ε auf einer Geraden l entsprechen die Tangenten einer Kurve 4ter Klasse, welche die Schnitte der 5 singulären Ebenen $\varepsilon\iota^0$ mit ε und l selbst berührt. Diese Kurve ist der Schnitt des Ebenenbüschels,

welcher im N. der Geraden l zugehört. Den g_ε durch einen Punkt M entsprechen die Punkte einer Kurve 4ten Grades mit M als dreifachem Punkte. Diese Kurve ist der Schnitt von ε mit der zu M gehörigen Steiner'schen Fläche Fm^4.

Projektion des Nullsystems von einem Punkte aus: Ordnen wir in dem Bündel mit dem Mittelpunkte P jeder ε_P die Gerade gp zu, welche den ihr im N. entsprechenden Punkt mit P verbindet, so ist auch jeder Geraden (gp) durch P nur eine ε_P zugeordnet, nämlich die Ebene, welche dem Schnitt von gp mit Fp^4 im N. entspricht und durch P geht. Beschreibt ε_P einen Büschel um eine Axe l, so projicieren die entsprechenden gp den im N. zu l gehörigen Kegelschnitt. Beschreibt gp eine Ebene η, so umhüllt die entsprechende ε_P den Kegel, welcher von P aus an die im N. zu η gehörige Fläche $\varphi\eta^2$ geht. Die durch das Nullsystem bestimmte Beziehung der gp und ε_P ist somit eine quadratische und wir haben den Satz:

Das zu einem Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse mit einer eigentlichen Brennfläche gehörige Nullsystem wird von jedem Punkte aus durch ein quadratisches Nullbündel projiciert.

§ 5. Regelflächen dritten und zweiten Grades in dem Strahlensysteme.

Alle Strahlen, welche eine beliebige Gerade g^0 in einer der singulären Ebenen ε^0 treffen und ausserhalb von ε^0 sich befinden, bilden im A. eine Regelfläche R_3 3ten Grades. g^0 ist einfache Leitgerade derselben.

Ein linearer Komplex durch R_3 enthält im A. noch eine Regelfläche R_2 2ten Grades. Jeder lineare Komplex hat nämlich mit einem Strahlensystem n^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse eine Regelfläche $n + k^{ten}$ Grads gemein. Denn alle Strahlen dieser Regelfläche, welche irgend eine Gerade g treffen, müssen auch ihre konjugierte g^1 schneiden. g^1 trifft aber die zu g gehörige R_{n+k} des Strahlensystems in $n + k$ Punkten.

Jeder lineare Komplex durch R_2 enthält i. Allg. auch eine R_3. Liegen $R_2{}^0$ und $R_3{}^0$ in demselben speziellen Kom-

plexe durch die doppelte Leitgerade l_2 von R_3^0, so befindet sich kein Strahl von R_2^0 in der singulären Ebene ε^0, welche die einfache Leitgerade von R_3^0 enthält. Ein solcher Strahl müsste durch den Schnitt von l_2 mit ε^0 gehen. Von den 3 Strahlen durch diesen Punkt gehören die 2 in ε^0 liegenden offenbar zu R_3^0 und der ausserhalb zu R_2. Diese Fläche schneidet daher ε_0 in einem Kegelschnitt. Durch die Schnitte des letzteren mit einer beliebigen Geraden g auf ε^0 gehen die 2 Strahlen, welche R_2^0 mit der zu g gehörigen R_3 gemeinsam hat. R_2^0 lässt sich folglich mit jeder R_3, deren einfache Leitgerade in ε^0 liegt, durch einen linearen Komplex verbinden (das durch die beiden Leitgeraden von R_3 als Direktricen bestimmte Strahlensystem schneidet R_2^0 in 2 Strahlen). — Mit jedem andern R_3 hat R_2^0 i. Allg. nur einen Strahl gemein. R_2 hat nämlich in jeder andern singulären Ebene ε_ι^0 einen Strahl, da von den 2 Strahlen, welche durch den Schnitt der Doppelgeraden l_2 mit ε_ι^0 gehen und zugleich in ε_ι^0 liegen, nur einer zu R_3^0 gehört. — R_2^0 kann mit einem R_3, welches zu einer der übrigen singulären Ebenen gehört i. Allg. nicht durch einen linearen Komplex verbunden werden.

Die Regelflächen R_3, die mit derselben R_2 durch lineare Komplexe verbunden werden können, haben ihre einfachen Leitgeraden in derselben singulären Ebene.

§ 6. Erzeugung mittelst linearer Komplexe.

Drei zu einander projektivische Büschel linearer Komplexe erzeugen ein Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse, wenn drei Direktricen der Grundstrahlensysteme der Büschel, von jedem eine, in einer Ebene liegen und die speziellen Komplexe durch diese Direktricen einander entsprechen.

Beweis: Das Strahlensystem ist dritter Ordnung.

Die Ebenen, welche in den Komplexen der drei Büschel einem Punkte P im Raume entsprechen, bilden drei zu einander projektivische Ebenenbüschel. Zwei der Ebenenbüschel erzeugen mit dem dritten zwei Kegelflächen zweiten Grades, die sich in

der Axe des dritten Ebenenbüschels und in noch drei Strahlen schneiden.

Letztere sind je drei einander entsprechenden Komplexen gemeinsam und gehören zu dem gesuchten Strahlensysteme.

Das Strahlensystem ist von der zweiten Klasse.

Die Punkte, welche einer Ebene in den Komplexen der Büschel entsprechen, liegen in derselben auf drei zu einander projektivischen Punktreihen. Es gibt hier ebenfalls drei Gerade, welche drei entsprechende Punkte der drei Reihen verbinden, durch die also in jedem der Komplexbüschel entsprechende Ebenen gehen.

Eine dieser Geraden ist der Schnitt der Ebene mit jener Ebene, in der drei Direktricen liegen. Die drei projektivischen Komplexbüschel erzeugen also ein Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse nebst einem Strahlensystem erster Klasse und nullter Ordnung.

Jedes Strahlensystem Σ dritter Ordnung und zweiter Klasse mit einer eigentlichen Brennfläche kann auf diese Weise erzeugt werden.

Legen wir durch zwei Regelflächen dritten Grades R_3 von Σ, welche zur selben singulären Ebene gehören, zwei Komplexbüschel, so sind diese projektivisch auf einander bezogen, wenn man je zwei Komplexe einander zuordnet, welche durch dieselbe Regelfläche R_2 von Σ gehen.

Erster Beweis: Bilden wir das Komplexgebüsch*) durch die beiden Strahlen s und s', welche die beiden Strahlensysteme durch die zwei R_3 mit einander gemein haben, auf den Raum ab, so können wir zeigen, dass den Strahlensystemen, die in je zweien durch dieselbe R_2 gehenden Komplexen enthalten sind, die Geraden einer Fläche 2ten Grades entsprechen.

Jedes Strahlensystem S durch s und s' hat mit einer R_2, welche mit den R_3 durch lineare Komplexe verbunden werden kann, entweder keinen oder zwei Strahlen gemein. Hat sie nämlich einen Strahl mit dem System gemein und legen wir

*) Schur Strahlenkomplexe 1ten u. 2ten Grades. Math. Ann. XV. p. 434. § 2.

durch ihn zwei Komplexe der Büschel, so hat das Schnittstrahlensystem S′ derselben mit S drei Strahlen, also eine Regelfläche gemeinsam. Diese Regelfläche durch s und s′ enthält, da sie mit R_2 in demselben System S′ liegt 2 Strahlen von R_2. S hat also von R_2 zwei Strahlen. Durch einen derselben ist R_2 eindeutig bestimmt. S hat nun von Σ ausser einem der Strahlen s und s′ noch 4 Strahlen. Ueberhaupt enthält jedes lineare Strahlensystem von einem System n^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse $n + k$ Strahlen. Obige 4 Strahlen teilen sich in 2 Paare. Jedes Paar liegt mit s und s′ auf einer Regelfläche. Diese Regelflächen liegen aber in dem von den Komplexbüscheln in ihrer Zuordnung erzeugten Komplexe. Diesem entspricht in der Abbildung eine Regelfläche, dem Strahlensystem S entspricht eine Gerade und den 2 Regelflächen in S 2 Punkte. Jede Gerade im Raume trifft nur 2 Erzeugende der Regelfläche. Diese ist vom zweiten Grade und wird durch zwei projektivische Ebenenbüschel 1ter Ordnung erzeugt.

Zweiter Beweis: Zwei Komplexe durch zwei der R_3 und eine R_2 schneiden das Strahlensystem S durch eine dritte $R_3{}^0$ in den zwei Strahlen, welche $R_3{}^0$ mit R_2 gemeinsam hat. Die zwei Komplexbüschel (C′) und (C″) durch zwei der R_3 treffen S in zwei Büscheln von Regelflächen R′ und R″. Irgend eine R′ schneidet eine bestimmte R″ in zwei Strahlen von $R_3{}^0$. Hiedurch sind die (R′) und (R″) einander projektivisch zugeordnet. Denn beziehen wir die Büschel projektivisch so auf einander, dass drei beliebig genommene Regelflächen R′ denjenigen drei R″ entsprechen, welche sie in zwei Strahlen von $R_3{}^0$ treffen, so erzeugen die Büschel im Allgemeinen eine Regelfläche 4ten Grads. Diese hat mit $R_3{}^0$ eine Kurve 14ter Ordnung (8 Erzeugende, hierunter von jedem Büschel einen Grundstrahl, und die beiden Leitlinien) gemein, enthält also $R_3{}^0$ als einen Teil. S schneidet somit die Komplexbüschel (C′) und (C″) in zwei zu einander so projektivisch liegenden Büscheln (R′) und (R″), dass zwei einander entsprechende Regelflächen R′ und R″ mit R_3 in den Komplexen C′ resp. C″ liegen. Die Komplexbüschel selbst (C′) und (C″) sind hiedurch auf einander so projektivisch bezogen, dass je zwei durch die nämliche R_2

gehende Komplexe von (C′) und (C″) einander entsprechen. (Dies erkennt man aus der Abbildung des Komplexbüschels durch die beiden Grundstrahlen von (R′); den Flächen R′ entspricht eine Punktreihe im Raume, den Komplexen (C′) ein dazu perspektivisches Ebenenbüschel.) Die beiden speziellen Komplexe durch die einfachen Leitgeraden der beiden R_3 entsprechen einander, da sie durch dieselbe in ein Strahlenbüschel 2ter Ordnung ausartende Regelfläche R_2 gehen.

Wir haben hiemit bewiesen, dass jedes Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse mit einer einzigen Brennfläche durch drei zu einander projektivische Komplexbüschel erzeugt werden kann und dies auf unendlich viele Arten.

§ 7. Singularitäten.

Gehen wir jetzt von der Erzeugung selbst aus und wählen für die im Folgenden auftretenden Gebilde die Bezeichnungen, welche Herr Stahl in seiner Abhandlung „das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse“ (Crelle'sches Journal Bd. 91) gebraucht.

Die Ebene, in welcher drei der Direktricen der Grundstrahlensysteme liegen, heisse (01). In den Komplexen der drei Büschel (C_1) (C_2) (C_3) entsprechen einem Punkte P von (01) drei zu einander perspektivisch liegende Ebenenbüschel. Denn ihre Axen liegen in der Ebene (01), welche in allen drei Büscheln sich selbst entspricht. Die drei Ebenen, in denen sich entsprechende Ebenen von je zweien der Büschel schneiden, gehen entweder durch eine Gerade s, welche dem Strahlensystem dritter Ordnung Σ_0 angehört, oder fallen zusammen. Ihre Vereinigungsebene enthält dann ein Strahlenbüschel 1ter Ordnung von Σ_0. Zwei Regelflächen $R_2{}^0$, in denen je drei entsprechende Komplexe sich schneiden, haben nun im Allgemeinen mit (01) vier Punkte M, N, O, P gemein. Durch jeden dieser Punkte gehen ausserhalb (01) zwei Strahlen s und s′. Die beiden $R_2{}^0$ können, wie aus der Erzeugung hervorgeht, keinen Strahl gemein haben. Die 4 Punkte M, N, O, P sind singuläre Punkte. Die Ebenen ihrer Strahlenbüschel gehen durch s und s′. Ausser diesen Punkten gibt es in (01) keine singulären Punkte mehr.

Ein solcher müsste auf beiden R_2^0 liegen; denn in einem singulären Punkt schneiden sich alle einander entsprechende Komplexe der Büschel in durch ihn gehenden Strahlen. Die Ebenen der Strahlenbüschel durch M, N, O, P heissen (12) (13) (14) (15).

Alle Regelflächen R_2, welche Schnitte von drei entsprechenden Komplexen sind, berühren diese Ebenen. Es lässt sich nun zeigen, dass auch die Leitstrahlen der R_2 durch die Punkte M, N, O, P 4 ebene Strahlenbüschel bilden.

Beweis: Diejenigen Strahlen in den Büscheln (1i), durch welche dieselben Komplexe C_1, C_2, C_3 gehen, gehören derselben R_2 an. Irgend zwei der Büschel etwa (14) und (15) sind dadurch projektivisch auf einander bezogen, dass die zum selben Komplexe C_1 oder also zur selben R_2 gehörigen Strahlen einander entsprechen. Von irgend einem Punkte auf (01), etwa von M aus werden die beiden Büschel durch perspektivische Ebenenbüschel projiciert. Diese Ebenenbüschel liegen selbst zu einander perspektivisch, da die ihre Axen enthaltende Ebene (01) sich selbst entspricht. Die Schnittgeraden entsprechender Ebenen, welche nichts anders sind als die Leitstrahlen der R_2, da sie von jeder R_2 drei Strahlen (einen davon in M) schneiden; diese Schnittgeraden also liegen in einer Ebene (02), was zu beweisen war. Ebenso befinden sich die Geraden der Leitschaaren von R_2, welche durch N, O, P gehen, in den Ebenen (03) (04) (05).

Die Strahlen von Σ_0 bilden in (02) (03) (04) (05) Strahlenbüschel 2ter Ordnung.

Beweis: Die Büschel der Leitgeraden in (0k) und (0l) sind offenbar auch projektivisch gelegen, wenn jedem Strahle in (0k) der mit ihm zur selben R_2 gehörige in (0l) entspricht. Sie schneiden also auf (0i) zwei projektivische Punktreihen aus. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, zu denen offenbar auch der Schnitt von (0i) mit (01) gehört, sind Strahlen von Σ_0, da sie von jeder R_2 drei ihrer Leitgeraden treffen. Im Allgemeinen umhüllen diese Geraden eine Kurve zweiter Klasse. Hiemit ist der Satz bewiesen.

Dass in (01) selbst ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung liegt, folgt daraus, dass in ihr 8 nicht durch einen Punkt gehende Strahlen von Σ_0 sich befinden.

§ 7a. Weitere singuläre Punkte.

In der Schnittgeraden von zwei Ebenen (12) und (13) werden von den Strahlen in diesen Ebenen zwei projektivische Punktreihen ausgeschnitten. Die Strahlenbüschel sind immer als so auf einander bezogen vorausgesetzt, dass die Strahlen derselben Komplexe C_1 C_2 C_3 oder derselben Regelfläche einander entsprechen. Die beiden Punktreihen haben im Allgemeinen zwei Punkte entsprechend gemein, von denen der eine in (01) liegt. Der Punkt ausserhalb heisse A. Die Strahlen durch A in (12) und (13) gehören einer zerfallenden $R_2{}^0$ an. Das eine Strahlenbüschel von $R_2{}^0$ hat A zum Mittelpunkt und seine Ebene geht durch A, M und N. Die Leitgeraden von $R_2{}^0$, welche durch O und P gehen, müssen, da sie ausserhalb der Ebene (A M N) liegen, notwendig durch A gehen. Die Ebene des zweiten Strahlenbüschels von $R_2{}^0$ geht somit durch A, O und P. Sein Mittelpunkt B liegt auf dem Schnitt von (02) und (03), wie sich leicht einsehen lässt. $\overline{A\,B}$ ist der Schnitt von (A M N) und (A O P), geht daher durch den Schnitt von M N und O P. — Durch Verbindung von allen Ebenen (1k) mit einander nach derselben Weise kommen wir zu 6 singulären Ebenen mit Strahlenbüscheln erster Ordnung. Die 6 Ebenen gehen durch die Seiten des vollständigen Viereks M N O P.

Das Strahlensystem Σ_0 enthält 5 singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln 2ter Ordnung und 10 mit Strahlenbüscheln 1ter Ordnung.

In jeder singulären Ebene liegen 4 singuläre Punkte. Die Ebenen, deren Strahlenbüschelmittelpunkt auf (01) liegt, gehen nur durch einen Punkt des Vierecks M N O P, diejenigen, deren Mittelpunkt ausserhalb liegt, gehen durch zwei der Ecken. Endlich gehen die Ebenen mit Strahlenbüscheln 2ter Ordnung durch eine Ecke.

§ 8. Das Strahlensystem Σ_1.

Legen wir durch die Leitschaaren $L_2{}^0$ zweier R_2 lineare Komplexe, in denen der Ebene (01) derselbe Punkt entspricht, so ist durch dieselben ein Komplexbüschel bestimmt. Stellen wir so drei Büschel her und beziehen sie derartig projektivisch auf einander, dass die Komplexe durch die beiden $L_2{}^0$ einander entsprechen und ebenso die speziellen Komplexe durch die in (01) enthaltenen Direktricen der Grundstrahlensysteme.

Die drei Komplexbüschel erzeugen ein Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse Σ_1, welches in (02) (03) (04) (05) Strahlenbüschel ersten Grades durch M, N, O, P enthält, da durch diese Punkte je zwei Strahlen der beiden Leitschaaren $L_2{}^0$ gehen. Durch die Komplexe der drei Büschel und die von ihnen erzeugten Regelflächen P_2 sind die Strahlen der Büschel in (0k) so auf einander bezogen, dass die im selben Komplexe oder in derselben P_2 enthaltenen Strahlen einander entsprechen. Diese projektivische Zuordnung ist dieselbe wie die früher angeführte mittelst der R_2. Denn die Strahlen der beiden $L_2{}^0$ und die Schnitte von (0k) mit (01) entsprechen einander in beiden Fällen. Jede P_2 hat also mit der Leitschaar von einer R_2 vier Strahlen (in den 4 Büscheln) gemein, fällt folglich mit ihr zusammen.

Das Strahlensystem Σ_1 wird von den Leitschaaren der R_2 gebildet.

§ 8a. Weitere Strahlensysteme: Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5.

Benützen wir statt der Ebene (01) eine der Ebenen (0k), so erhalten wir eine neue Schaar von Regelflächen, welche Σ_0 zusammensetzen. Die Leitschaaren dieser Regelflächen — bezeichnen wir die Regelflächen mit G_{0k} — liefern uns ein neues Strahlensystem Σ_k, das mit Σ_0 dieselben Singularitäten besitzt.

Jedes Σ_k kann selbst wieder auf fünffache Weise erzeugt werden und enthält 5 verschiedene Regelflächenschaaren. Die Leitschaaren zu jedem System von Regelflächen ergeben immer wieder eines der sechs Strahlensysteme Σ_i.

Zum Beweise der letzteren Behauptung erzeugen wir Σ_k über (1k) — in (1k) liegt ein Strahlenbüschel von Σ_0, das einen Punkt von (0k) zum Mittelpunkte hat; die Leitstrahlen der über (0k) erzeugten Regelflächen von Σ_0 müssen daher in (1k) ein Büschel zweiter Ordnung bilden.

Das Strahlenbüschel 2ten Grades von Σ_k in (1k) fällt mit dem von Σ_1 zusammen.

Die übrigen Ebenen (1r) enthalten von Σ_k nur Strahlenbüschel 1ten Grades, da sie durch zwei singuläre Punkte auf (0k) gehen.

Die (1r) schneiden ferner (1k) nur in einem singulären Punkte je. Die Ebenen aber, welche nur durch einen singulären Punkt auf einer Ebene mit Strahlenbüscheln 2ter Ordnung gehen, haben, wie wir gegen den Schluss im vorigen Abschnitt gesehen, diesen Punkt zum Mittelpunkte. Σ_k hat also mit dem Strahlensysteme, welches aus den Leitschaaren der G_{1k} (Σ_1 über (1k) erzeugt) besteht, vier Strahlenbüschel 1ter Ordnung gemein, deren Mittelpunkte auf (1k) liegen. Die Strahlen von Σ_1 in den Ebenen (1r) bilden Strahlenbüschel 2ter Ordnung. Dies konnte früher ähnlich bewiesen werden, wie wir es bei den Strahlen von Σ_0 in (0k) gethan haben. Die Regelflächen von Σ_k, welche über (1k) erzeugt sind, fallen mit den Leitschaaren der Erzeugung von Σ_1 zusammen, da zu einem Strahle in einer der (1s) sich nur eine Regelfläche findet, von der 4 Leitgeraden in festen Ebenen durch feste Punkte liegen sollen. Es zeigt dies die Konstruktion einer solchen Regelfläche.

An die Stelle von Σ_0 und Σ_1 hätte jedes andere der Systeme treten können. Damit ist bewiesen, dass, wenn G_{ik} die Regelflächen einer der fünf Schaaren in Σ_i bedeuten, ihre Leitschaaren durch G_{ki} repräsentiert werden können. Durch jede der fünf Erzeugungen von Σ_i durch eine Regelflächenschaar müssen wir nämlich offenbar auf ein verschiedenes Strahlensystem Σ_r kommen.

Anmerkung.

Aus der Erzeugung von Σ mittelst linearer Komplexe ergibt sich eine einfache Form der Gleichungen des Systems in Strahlenkoordinaten. Wählen wir das Fundamentaltetraeder so, dass die in einer Ebene liegenden

Direktricen der Grundstrahlensysteme der 3 Komplexbüschel Kanten desselben sind, und geben wir dieser Ebene den Index 1, dann werden die Gleichungen der drei Büschel:

$$p_{12} + \lambda P_2 = 0 \quad p_{13} + \lambda P_3 = 0 \quad p_{14} + \lambda P_4 = 0,$$

wobei die P_i willkürliche lineare Funktionen der p_{ik} sind. Die Koordinaten der Strahlen von Σ_0 müssen dann den Relationen genügen:

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} = P_2 : P_3 : P_4 \text{ und}$$
$$p_{23}\, p_{14} + p_{31}\, p_{24} + p_{12}\, p_{34} = 0.$$

§ 9. Stahl'sche Erzeugungsarten.

I. Die Strahlen s_1 von Σ_1, welche eine Gerade l_1 in (01) schneiden, bilden eine Regelfläche R_3^1, deren doppelte Leitgerade ein Strahl s_0 von Σ_0 ist; denn die übrigen Strahlen s_1, welche diese Gerade treffen, bilden eine G_{10}. Schneidet s_0 die Ebene (01) im Punkte P, so ist jeder l_1 in (01) ein Punkt P zugeordnet und ebenso jedem P eine l_1, da durch P nur ein Strahl s_0 geht. Schreitet s_0 an einer Geraden l in (01) hin, so beschreibt er eine R_3 mit einem Strahl s_1 als doppelter Leitgeraden. Dieser Strahl ist allen zu den s_0 auf R_3 gehörigen R_3^1 von Σ_1 gemeinsam. (Dies beruht darauf, dass durch einen Strahl Σ_1 unendlich viele R_3^1, aber nur eine bestimmte Anzahl G_{10} gehen.) Die zu den Punkten von l gehörigen l_1 gehen durch einen Punkt. Die Zuordnung der l_1 und P ist eine reciprok-projektivische. Jede R_3^1 enthält von den Strahlenbüscheln des Systems Σ_1, welche durch die singulären Punkte A und B gehen, je einen Strahl, welcher l_1 und s_0, die Doppelgerade von R_3^1, trifft. Dies gibt die Erzeugung, welche Herr Stahl in seiner Abhandlung „das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse“ (Crelle'sches Journal Bd. 91 pag. 1) angewandt hat.

II. Die Strahlen s_0 von Σ_0 beziehen irgend zwei der singulären Ebenen (0i) und (0k) so auf einander, dass jedem Punkte in der einen Ebene nur ein Punkt in der andern entspricht (durch jeden Punkt von (0i) geht nur ein Strahl s_0). Beschreibt s_0 eine Regelfläche R_3 längs der Geraden l in (0i), so beschreibt sein Schnitt mit (0k) einen Kegelschnitt K; denn R_3 hat, wenn l vom Schnitt der Ebenen (0i) und (0k) verschieden ist, in (0k) nur eine Erzeugende. Jeder K geht durch die 3 singulären Punkte auf (0k), welche ausserhalb (0i) liegen;

denn jede R_3 enthält von den Strahlenbüscheln des Systems Σ_0 durch diese Punkte von jedem einen Strahl. Die Ebenen (0i) und (0k) sind durch die Strahlen von Σ_0 quadratisch auf einander bezogen. Die Geraden in (0i), welche durch den singuläreu Punkt p auf (0i) und (0k) gehen, sind Leitstrahlen der Regelflächen G_{0k}, welche (0k) in Kegelschnitten durch p und die 3 Hauptpunkte der Zuordnung treffen. Dem Punkte p auf (0i) entspricht auf (0k) derselbe Punkt.

Hieraus folgt die Erzeugung, welche Herr Stahl in der Abhandlung „das Strahlensystem 4ter Ordnung und 2ter Klasse“ (Crelle'sches Journal Bd. 97. 147) angibt.

§ 10. Erzeugung mittelst zweier projektivischen Strahlensystembündel.

Erwähnen wir nur kurz, dass durch 2 Strahlensystembündel, deren Grundregelflächen einen Strahl s gemein haben, ein Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse erzeugt werden kann. Die Bündel müssen hiebei so auf einander projektivisch bezogen sein, dass diejenigen Strahlensysteme in den speziellen Komplexen durch die mit s in einer Ebene liegenden Leitstrahlen beider Regelflächen einander zugeordnet sind, deren andere Direktricen sich in demselben Punkte von s treffen. Die Strahlensysteme erzeugen dann ein Strahlensystem 0ter Ordnung und 1ter Klasse und ein System 3ter Ordnung und 2ter Klasse. Die Strahlen der Bündel durch irgend einen Punkt P bilden 2 kollineare Strahlenbündel, welche i. Allg. 3 Gerade entsprechend gemeinsam haben.

Durch diese projektivische Beziehung der beiden Strahlensystembündel sind auch die Komplexe der Komplexbündel durch obige 2 Regelflächen einander projektivisch zugeordnet. Die Verbindungsebenen derjenigen 3 Strahlen durch P, welche in den Strahlensystembündeln dreien einander entsprechenden Strahlensystemen angehören, sind offenbar Ebenen, welche dem Punkte P in entsprechenden Komplexen der Bündel zugeordnet sind. — Das zum Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse mit eigentlicher Brennfläche gehörige Nullsystem kann somit durch 2 projektivische Bündel gewöhnlicher Nullsysteme erzeugt werden.

§ 11. Brennfläche.

(*Grad und Klasse: Zwei von den projektivisch auf einander bezogenen Büscheln linearer Komplexe, welche das Strahlensystem Σ_0 3ter Ordnung und 2ter Klasse erzeugen, lassen einen Komplex 2ten Grads entstehen, welcher Σ_0 enthält. Die Strahlen dieses Komplexes, welche eine beliebige Gerade g und die Doppelkurve D_2 der zugehörigen R_5 von Σ_0 treffen, bilden eine Regelfläche 8ter Ordnung, die aus R_5 selbst, einem Kegel, welcher den Schnittpunkt von g und D_2 zur Spitze T hat, und einem Strahlenbüschel 1ter Ordnung mit dem Mittelpunkt S auf D_2 besteht. Alle Strahlen des Komplexes, welche g schneiden umhüllen eine Plücker'sche Komplexfläche K_4, welche auf D_2 den singulären Punkt S hat. Der Schnitt zweier unendlich benachbarten Strahlen in einer Ebene durch g liegt auf D_2 und K_4. D_2 schneidet K_4 in 8 Punkten. Durch S und T gehen i. Allg. je zwei verschiedene Strahlen von Σ_0; beide Punkte sind Doppelpunkte von K_4. Es gehen daher $8 - 2 \times 2 = 4$ Tangentialebenen an die Brennfläche durch g.

Ebenso ist die Anzahl der Punkte auf g, durch welche zwei zusammenfallende Strahlen gehen, gleich der Anzahl der Ebenen des Doppelebenenbüschels 4ter Ordnung von R_5, welche K_4 berühren, diese Anzahl vermindert um die 4 singulären Ebenen von K_4, welche S nicht enthalten und die durch g gehende Doppelebene von R_5, alle doppelt gerechnet.

Der Grad der Brennfläche ist daher $4 \times 4 - 2 \times 4 - 2 = 6$.

Singuläre Ebenen der Brennfläche. Das Strahlenbüschel (P) 1ter Ordnung von Σ, welches durch den singulären Punkt P auf (01) geht, ist auf das Strahlenbüschel 2ter Ordnung von Σ_0 in der Ebene (05) von (P), wie aus Früherem folgt, projektivisch bezogen, wenn die Strahlen derselben G_0, einander zugeordnet werden. Da der Schnitt von (05) mit (01) hier sich selbst entspricht, so erzeugen die Büschel eine Kurve γ_{05} 2ten Grads, welche durch die 4 singulären Punkte auf (05) geht und die Enveloppe K_{05} der Strahlen von Σ_0 in (05)

*) Plücker „n. Geometrie des Raumes“ Abt. I. p. 212.

doppelt berührt. Durch jeden Punkt von γ_{05} geht ausserhalb (05) kein Strahl von Σ_0 mehr; er ist der Berührungspunkt von (05) mit einer G_{05}, welche alle Strahlen von Σ_0 enthält, die ausserhalb (05) durch die Punkte eines Strahls von (P) gehen. Jeder Punkt γ_{ok} ist Brennpunkt eines Strahls s_o von Σ; der andere Brennpunkt von s_o liegt auf K_{05}. Die Ebene (05) gehört als Brennebene zu dem letzteren Punkte und berührt somit die Brennfläche in dem Brennpunkte von s_o, der auf γ_{05} liegt.

Hieraus folgt:

Die Ebenen (ok) berühren die Brennfläche von Σ_0 längs einem Kegelschnitte γ_{ok} und schneiden sie nach der Kurve K_{ok}, welche die Strahlen von Σ_0 einhüllen. γ_{ok} berührt K_{ok} zweifach.

§ 12. Die übrigen Strahlensysteme, welche zur Brennfläche gehören.

Wir können allgemein sagen: Besitzt ein Strahlensystem Σ^n n^{ter} Ordnung und 2ter Klasse eine singuläre Ebene ε^0 mit einem Strahlenbüschel von der Ordnung $n-1$, so bilden die Strahlen durch eine Gerade g^0 auf ε^0, welche ausserhalb ε^0 liegen, eine Regelfläche $R_3{}^n$ dritter Ordnung mit g^0 als einfacher Leitgeraden. Die doppelten Leitgeraden von $R_3{}^n$ bilden ein Strahlensystem S von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}$ und der Klasse $2\varrho = 2(n-2)$, welches mit Σ^n dieselbe Brennfläche besitzt.

Beweis: S ist von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}$. Jeder Geraden g^0 in ε^0 gehört ein Strahl s von S als doppelte Leitgerade ihrer $R_3{}^n$ zu. Umgekehrt gehört zu jedem s auch eine g^0. Andernfalls wäre s Doppellinie von mehreren $R_3{}^n$, etwa von R_3' und R_3''. In jeder Ebene durch s liegen 2 Strahlen σ von Σ^n, von welchen der eine R_3' der andere R_3'' angehören müssten. Die σ, welche ausserdem noch durch s gehen müssten, bildeten eine Fläche R_{n-4} vom Grade $n-4$, welche ganz in einer Ebene liegen müsste. Für den Fall $n > 4$ lägen daher alle s in singulären Ebenen, was nicht der Fall sein kann, da durch jeden Punkt im Raume Strahlen s gehen — es ist dies leicht

einzusehen. Im Falle $n = 4$*) gibt es 2 Ebenen ε^0 und $\varepsilon_1{}^0$ von der Ordnung $n - 1$ und von den 2 Regelflächen 3ter Ordnung durch s hat eine ihre einfache Leitgerade in ε^0, die andere in $\varepsilon_1{}^0$. Also entspricht auch hier jedem Strahl s eine g^0 in ε^0. Wenn $n < 4$ geht durch s ohnedies nur eine R_3.

Die Strahlen σ durch einen Punkt P bestimmen auf ε^0 durch ihre Schnittpunkte ein vollständiges n-Eck, dessen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten ebensoviele Strahlen s durch P bestimmen. Das Strahlensystem ist von der Klasse 2ϱ. Eine beliebige Ebene ε enthalte die Strahlen σ_1 und σ_2 von Σ^n. Ziehen wir durch den Schnitt Q von σ_1 mit ε^0 eine Gerade g in ε, so finden sich auf derselben $\varrho = n - 2$ Punkte M, in denen sich je 2 Strahlen σ schneiden, die mit g in einer Ebene η liegen. (Dies folgt aus der Definition von ϱ, welches wir für Strahlensysteme 2ter Klasse mit eigentlicher Brennfläche gleich $n - 2$ gefunden haben.) Der Schnitt von η mit ε^0 bestimmt eine $R_3{}^n$, welche σ_1 enthält; ihre Doppellinie trifft ε in einem der Punkte M. Durch Q geht i. Allg. kein Strahl von S, welcher in ε liegt. Die ϱ Punkte M liefern uns ϱ Strahlen s, welche sich in ε befinden. Ebenso erhalten wir zu σ_2 ϱ Strahlen, die von den ersteren verschieden sind, da σ_1 und σ_2 i. Allg. nur durch eine $R_3{}^n$ verbunden werden können. Die Doppellinie dieser $R_3{}^n$ geht durch den Schnitt von σ_1 mit σ_2 und liegt i. Allg. ausserhalb ε. Wir haben also in ε im Ganzen 2 ϱ Strahlen von S.

Σ^n und S besitzen dieselbe Brennfläche. Fallen von den σ durch einen Punkt P zwei zusammen, so fallen auch von dem vollständigen n-Eck, das diese Strahlen auf ε^0 bestimmen, 2 (n — 2) Seiten paarweise zusammen und damit auch 2 (n —2) der durch P gehenden Strahlen von S. Umgekehrt wenn zwei s durch P auf einander fallen, so thun dies auch 2 der Strahlen σ. Denn da zu jedem s nur eine g^0, also nur eine Seite des zu P gehörigen n-Ecks gehört, so sind 2 der Ecken desselben zusammengefallen. Die Strahlen σ und S haben dieselben Brennpunkte und damit auch dieselben Brennebenen.

*) Stahl „das Strahlensystem 4ter Ord. u. 2ter Klasse“ Crelle'sches Journal Bd. 97 p. 147.

Die n — 2 Strahlen von S, welche einen Punkt P zum Brennpunkte haben, liegen mit dem Strahl σ, welcher P ebenfalls zum Brennpunkte hat, in der nicht zu P gehörigen Brennebene von σ.

Für das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse Σ_0 folgt: Die Strahlensysteme $\Sigma i = 1,2,3,4,5.$ haben mit Σ_0 dieselbe Brennfläche. — Jede der 15 singulären Ebenen (ik) berührt die Brennfläche längs eines Kegelschnitts γik, der durch die 4 singulären Punkte auf (ik) geht, und schneidet sie in einer Kurve Kik, welche von dem Strahlenbüschel 2ter Ordnung des Systems Σi eingehüllt wird. γik berührt Kik doppelt.

§ 13. Rückkehrkurve.

Die Brennfläche wird erzeugt durch die Schnitte unendlich benachbarter G_{01}, sie ist also Enveloppe von Charakteristiken 4ter Ordnung. Die Punkte, in welcher 2 auf einander folgende Charakteristiken oder 3 unendlich benachbarte G_{01} sich schneiden, sind Punkte ihrer Rückkehrkurve. Diese wird also von den Punkten gebildet, durch welche 3 zusammenfallende Strahlen von Σ_0 gehen.

Die Strahlen von Σ_0 durch einen Punkt bestimmen ein Dreikant $\triangle$. Die Seiten aller $\triangle$, deren Ecken in einer Ebene ε liegen, berühren die Fläche $\varphi\varepsilon^2$ 2ten Grades, welche ε im Nullsysteme von Σ_0 entspricht. Sind 2 Kanten von $\triangle$ einander unendlich benachbart, so ist die dritte Kante Schnitt zweier auf einander folgenden Tangentialebenen von $\varphi\varepsilon^2$, somit selbst Tangente von $\varphi\varepsilon^2$. Umgekehrt geht auch jeder Strahl von Σ_0, welcher $\varphi\varepsilon^2$ berührt, durch einen Punkt der Brennfläche auf ε. Alle diese Strahlen bilden eine Regelfläche R_{10} 10ten Grads. — Die Tangenten von $\varphi\varepsilon^2$, welche eine Gerade g und die Doppelkurve D_2 der zugehörigen R_5 von Σ_0 schneiden, bilden eine Regelfläche P_6 6ten Grads und einen Kegel K mit dem Schnitt von g und D_2 als Spitze. g ist 4-fache Leitgerade von P_6 und D_2 eine Doppelkurve. P_6 hat demnach mit R_5 $6 \times 5 - 3 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 = 10$ Strahlen gemein. K enthält von R_5 im Allgemeinen keinen Strahl. — In der singulären Ebene (0i) liegen die zwei Strahlen von Σ_0, welche

durch ihren Berührungspunkt mit φ_{ε^2} gehen, auf der Regelfläche R_{10}. Die Tangenten von φ_{ε^2}, welche eine Gerade g_0 auf (0i) und die doppelte Leitgerade ihrer zugehörigen R_3^i von Σ_0 schneiden, bilden eine Regelfläche P_4, welche mit R_3^i $4 \times 3 - 2 - 2 \times 2 = 6$ Strahlen gemein hat. Durch g^0 gehen also ausser (0i) nur 6 Tangentialebenen an R_{10}. (0i) ist eine vierfache Tangentialebene von R_{10} und berührt sie längs zweier Erzeugenden. — Die beiden Erzeugenden von R_{10} sind, wie man sich leicht überzeugt, einfache Linien dieser Regelfläche. — Ebenso beweist man, dass R_{10} von ε längs der beiden Strahlen von Σ_0 berührt wird. Wir haben also den Satz:

Die Strahlen von Σ_0, welche durch die Punkte des Schnitts einer Ebene ε mit der Brennfläche gehen und diese Punkte nicht zu Brennpunkten haben, berühren eine Fläche zweiten Grads, welche ε und die 5 singulären Ebenen (0i) zu Tangentialebenen besitzt. Ausserdem bilden sie eine Regelfläche 10ten Grads mit den Ebenen ε und (0i) als vierfachen Ebenen. ε und (0i) berühren sie je längs zweier Erzeugenden.

Die Brennfläche, die Fläche φ_{ε^2} und R_{10} haben $4 \times 2 \times 10 = 80$ gemeinschaftliche Tangentialebenen. Hiebei sind die Ebenen (oi) als vierfache Ebenen von R_{10} und Doppelebenen der Brennfläche je 8-mal gerechnet. Ferner gehören noch die 4 Brennebenen der Strahlen von Σ_0 in ε dazu. Jede der übrigen 36 Ebenen geht durch eine Erzeugende σ_1 von R_{10}, welcher ein zweiter Strahl σ_2 von Σ_0 unendlich benachbart ist. σ_1 und σ_2 bestimmen ein Dreikant mit der Spitze auf ε, dessen 3 Seiten einander unendlich nahe liegen. Die 3 Kanten desselben sind Erzeugende von R_{10} und seine Seiten Doppelebenen davon. Die 36 Ebenen zerfallen also in 18 Doppelebenen, welche sich in 6 Gruppen zu 3 teilen. Jede Gruppe bildet ein Dreikant mit der Ecke auf ε. Diese Ecken sind Rückkehrpunkte der Brennfläche von Σ_0. Ihre Rückkehrkurve ist also von der 6ten Ordnung. In den singulären Ebenen (ik) liegen nur je zwei Punkte der Rückkehrkurve, nämlich die Berührungspunkte der Kurven γ_{ik} mit den K_{ik}. Die (ik) sind Doppeloskulationsebenen der Rückkehrkurve.

§ 14. Erzeugung der Brennfläche und ihrer Rückkehrkurve durch Flächen 2ten Grades.

Die Strahlenbüschel 1ten Grades von Σ_0 und Σ_1, welche M, N, O, P auf (01) zu Mittelpunkten haben, sind so projektivisch auf einander bezogen, dass die Strahlen derselben Regelflächen G_{01} einander entsprechen. Die Tangentialebenen der G_{01} in M, N, O, P, welche entsprechende Strahlen verbinden, bilden einen Ebenenbüschel 2ter Ordnung. Durch diese Büschel wiederum ist eine solche projektivische Beziehung zwischen den Bündeln M, N, O, P festgelegt, dass die Tangentialebenen derselben G_{01} einander zugeordnet sind.

Die Mantellinien des Kegels, welchen die durch M gehenden Tangentialebenen der G_{01} einhüllen, sind Tangenten an die Schnittkurven auf einander folgender G_{01} und berühren somit die Brennfläche im Punkte M. Hieraus folgt: Die singulären Punkte von Σ_0 sind Knotenpunkte der Brennfläche. Ihre Berührungskegel berühren je die 6 durch die singulären Punkte gehenden singulären Ebenen.

Die Tangentialebenen in den Punkten M, N, O, P an die Flächen 2ten Grades eines Bündels B, welches durch drei der G_{01} gelegt ist, bilden 4 zu einander projektivische Ebenenbündel. Diese Beziehung der Bündel M, N, O, P fällt mit der vorigen zusammen. — Das Bündel B enthält nämlich (01) als den Teil eines Ebenenpaares. Beidesmal entsprechen sich also in den 4 Bündeln die Tangentialebenen der 3 G_{01} und ausserdem ist beidesmal (01) sich selbst zugeordnet. Hiezu kommt, dass von vieren dieser Ebenen, welche durch einen der Punkte M, N, O, P gehen, sich keine 3 in einer Geraden schneiden. — Hieraus folgt: die Ebenen, welche sich in den Bündeln M, N, O, P entsprechen, schneiden sich je in einem Punkte.

Irgend eine Fläche zweiten Grades, welche in M, N, O, P entsprechende Ebenen berührt, bestimmt mit B ein Flächengebüsch $\mathfrak{G}$ von der Art, dass alle Flächen desselben in der obigen Zuordnung entsprechende Ebenen durch jene Punkte zu Tangentialebenen haben. Man zeigt nämlich, wie vorher, dass diese Fläche mit irgend 2 Flächen von B ein Bündel B' bildet,

welches dieselbe projektivische Beziehung der Bündel M, N, O, P herstellt. Dem Flächengebüsch $\mathfrak{G}$ gehören auch alle Flächen von solcher Beschaffenheit an. Sei nämlich φ eine Fläche durch M, N, O, P, welche die entsprechenden Ebenen α, α', α'', α''' berührt, dann gibt es von B und B' je eine Fläche, welche α, α', α'' und α''' berührt. Diese 2 Flächen bestimmen in $\mathfrak{G}$ ein Büschel, dessen Flächen diese Ebenen ebenfalls berühren, und zugleich enthält dieses Büschel alle Flächen von dieser Beschaffenheit, da durch jeden Punkt im Raume eine solche Fläche eindeutig bestimmt ist.

Hieraus folgt:

Die Flächen G_{01} liegen in einem Gebüsche $\mathfrak{G}$.

Die übrigen 4 associierten Punkte jedes Bündels von $\mathfrak{G}$ liegen in Ebenen, welche durch dieselbe Gerade a auf (01) gehen.

Beweis: Die Ebene (01) habe in Bezug auf die Flächen eines Büschels B von $\mathfrak{G}$, welches durch einen Kegelschnitt K in (01) geht und (01) als Doppelebene enthält, den Pol P und in Bezug auf eine weitere Fläche F_2 von $\mathfrak{G}$, welche durch K geht, den Pol Q, dann gibt es eine Gerade a auf (01), welche in Bezug auf F_2 und die Flächen von B gemeinschaftliche Polare von $\overline{PQ}$ ist. Durch a gehen die Ebenen der Schnitte von F_2 mit den Flächen von B. Jede Fläche des Bündels $\mathfrak{R}$ durch K bestimmt so mit B eine Gerade auf (01). Alle diese Geraden sind mit a identisch, da jede Fläche von $\mathfrak{R}$ einem der Büschel angehört, welche F_2 mit den Flächen von B bestimmt. Die Ebenen der Grundkurven aller Büschel in $\mathfrak{R}$ gehen also durch a. Jedes Bündel von $\mathfrak{G}$ hat aber mit $\mathfrak{R}$ ein Büschel gemein; seine 4 associirten Punkte ausserhalb (01) liegen daher auf einer Grundkurve von $\mathfrak{R}$ und somit in einer Ebene durch a, was zu beweisen war.

Bilden wir den Raum des Gebüsches $\mathfrak{Rg}$ in der bekannten Weise auf einen andern Raum $\mathfrak{R}$ ab*), so dass den Flächen von $\mathfrak{G}$ Ebenen in $\mathfrak{R}$ entsprechen. Die Ebenen, welche den Flächen G_{01} entsprechen, bilden einen Raumbüschel E_3 3ter Ordnung; denn durch jeden Punkt von $\mathfrak{Rg}$ gehen 3 G_{01}. Sei

*) Reye, Geometrie der Lage, II. Abth. p. 234. Aufl. 2.

C_3 die Kurve dritter Ordnung, deren Oskulationsebenen den Büschel E_3 bilden, dann entsprechen den Punkten von C_3 die Punkte der Rückkehrkurve auf der Brennfläche von Σ_0. Dieser Fläche selbst entspricht die Regelfläche der Tangenten von C_3.

Entspreche α in $\mathfrak{R}$ der Doppelebene (01) in $\mathfrak{R}g$, dann entsprechen den Punkten der Tangente t, welche in α liegt und C_3 im Punkte A berührt, in $\mathfrak{R}g$ die Kegelschnitte durch M, N, O, P; denn durch jeden derselben geht ausser (01) nur eine G_{01}. Dem Kegelschnitt γ_{01} entspricht in $\mathfrak{R}$ der Punkt A; durch γ_{01} geht nämlich ausser (01) keine G_{01}. — Beiläufig berührt γ_{01} die Mantellinien in (01) von denjenigen Kegeln, welche die Tangentialebenen der G_{01} in M, N, O, P bilden —. Dem Büschel der Ebenenpaare durch a, von welchen jedes (01) als Teil enthält und somit durch obige Kegelschnitte geht, entspricht das Büschel der Ebenen durch t.

(*Dem Kegel K, welcher C_3 von A aus projiciert, entspricht in $\mathfrak{R}g$ eine Fläche φ_2 zweiten Grads, welche die Rückkehrkurve P_6 der Brennfläche B_4 enthält, und die Ebene (01) doppelt gerechnet.

Beweis: Der Kegel wird erzeugt durch den Ebenenbüschel mit der Axe t und einen projektivisch auf ihn bezogenen Büschel mit der Axe s, wo s eine Sehne von C_3 durch A ist. Die Fläche φ_2 wird daher durch den Ebenenbüschel mit der Axe a und einen zu ihm projektivischen Flächenbüschel durch den Kegelschnitt γ_{01} erzeugt. Die Schnitte der entsprechenden Elemente dieser Büschel bilden eine Fläche 3ter Ordnung, welche in die Ebene (01) und eine Fläche φ_2 2ten Grads zerfällt; der Ebene α durch t entspricht nämlich bei der Erzeugung von K die Ebene (st) und dieser hinwiederum ist in $\mathfrak{R}g$ ein Ebenenpaar durch a zugeordnet.

Einer Regelfläche durch C_3, welche durch den Ebenenbüschel mit der Axe t und einen zu ihm projektivischen Büschel durch irgend eine Sehne s von C_3 erzeugt wird, entspricht in $\mathfrak{R}g$ eine Fläche 3ter Ordnung, welche P_6 enthält, und die Ebene (01).

*) Für das Folgende she.: Stahl „das Strahlens. 4ter O. und 2ter Kl.“ Crelle. 97. p. 147. Schluss d. Abth.

Die Fläche 3ter Ordnung wird von dem Ebenenbüschel durch a und einen ihm projektivisch zugeordneten Flächenbüschel durch zweimal 4 associierte Punkte auf P_6 erzeugt.

P_6 ist der vollständige Schnitt einer solchen Fläche γ_3 mit der Fläche φ_2; denn die Flächen, welche f_3 und φ_2 in $\mathfrak{R}$ entsprechen, haben ausser C_3 nur t gemein. Den Punkten von t entsprechen die Punkte auf (01) und waren schon bei der Erzeugung von φ_2 und f_3 in Abzug gebracht. Hieraus folgt, da a der Fläche f_3 angehört, und von φ_2 in 2 Punkten geschnitten wird, dass α die Verbindungslinie der beiden Punkte von P_6 in (01) ist.

Nennen wir c_{ik} die Geraden durch die Berührungspunkte von γ_{ik} und K_{ik}, dann ist $a = c_{01}$. Da die 4 Punkte von P_6, welche auf einer G_{01} sich befinden, auf einer Ebene durch a liegen, so ist dies im Besondern auch mit den Punkten von P_6 in jedem der 3 Ebenenpaare der Fall, welche sich unter den G_{01} befinden. Gehören c_{ik} und c_{rs} zu den Ebenen eines dieser Paare, so liegen sie mit c_{01} in einer Ebene. c_{01} schneidet also alle c, deren Index weder 0 noch 1 enthält. Dies gilt offenbar für alle Geraden c. Die c sind daher 15 Gerade einer Fläche F_3 3ter Ordnung, deren übrigen 12 ein Schläfli'sches Doppelsechs bilden.

Jede Ebene durch c_{01} schneidet F_3 nach einem Kegelschnitt, durch den eine der G_{01} geht.

Beweis: Im Raume $\mathfrak{R}$ ist der Ebenenbüschel durch t auf den Raumbüschel 3ter Ordnung E_3 projektivisch bezogen, wenn jeder Ebene durch t die Oskulationsebene ihres veränderlichen Schnittes mit C_3 entspricht. Hiedurch ist auch die Punktreihe, welche E_3 auf t ausschneidet auf den Büschel (t) projektivisch bezogen. Dies gibt für den Raum $\mathfrak{Rg}$:

Die Punktenpaare, welche die Kegelschnitte durch M, N, O, P auf c_{01} ausschneiden, sind in der Weise den Ebenen durch c_{01} projektivisch zugeordnet, dass jede Ebene demjenigen Punktenpaar entspricht, in welchem die durch ihre 4 Punkte von P_6 ausserhalb c_{01} gehende Fläche G_{01} die Axe c_{01} schneidet. Ebenso ordnet F_3 jeder Ebene ε durch c_{01} das Punktepaar zu,

in welchem ihr Schnitt mit $\varepsilon\ c_{01}$ trifft. Diese beiden projektivischen Zuordnungen sind dieselben. Denn beidesmal entsprechen sich die Elemente, welche im ersten Fall durch die 3 Ebenenpaare unter den G_{01} einander zugewiesen sind. — Hieraus folgt: die vier der übrigen 12 Geraden von F_3, welche c_{01} schneiden, bilden 2 Paare, von denen jedes auf einer G_{01} liegt. Zu den 12 Geraden gehören daher von jedem der 6 Strahlensysteme $\Sigma i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 2 Strahlen.

Erzeugung der Brennfläche: Die Tangenten von C_3 werden von jedem seiner Punkte durch Ebenenbüschel 2ten Grades projiciert. Die Ebenen zweier solcher Büschel sind durch die Punkte von C_3 einander projektivisch zugeordnet. Hieraus folgt: Die Brennfläche kann durch 2 Büschel 2ter Ordnung von Flächen 2ten Grades, welche auf einander projektivisch bezogen sind, erzeugt werden.

Projicieren wir C_3 von A aus, so geht in $\mathfrak{Rg}$ das entsprechende Büschel 2ter Ordnung durch γ_{01} und wir erhalten die Sätze: Auf der Brennfläche von Σ_0 befinden sich 15 Scharen von Kurven 4ter Ordnung. Eine der Schaaren besteht aus den Schnitten auf einander folgender Flächen einer Schaar Gik. Die Kurven dieser Schaar werden von γik aus durch Flächen 2ten Grades projiciert. Letztere berühren die Fläche φ_2 durch die Rückkehrkurve je längs eines Kegelschnittes.

Die drei Kegelschnitte γ_{01}, γ_{23}, γ_{45}, nach welchen die Brennfläche von den Ebenen (01), (23), (45) berührt wird, liegen auf einer Fläche 2ten Grades, welche φ_2 in einem Kegelschnitte durch die Punkte der Rückkehrkurve auf der Ebene $\overline{c_{01}\ c_{23}\ c_{45}}$ berührt. Solcher Flächen gehen durch γik drei; es gibt also im Ganzen 15.

Dieser Satz ist eine Spezialisierung des vorhergehenden; man betrachtet hier die Kurven, in welchen speziell die 3 Ebenenpaare unter den G_{01} die Brennfläche berühren.

Die Punkte der Rückkehrkurve teilen sich in Gruppen von je 4 Punkten. Die Punkte einer Gruppe liegen auf einer Ebene durch c_{01}. Irgend 3 Gruppen lassen sich durch eine Kurve 4ter Ordnung verbinden, welche auf φ_2 liegt.

Letzteres folgt daraus, dass durch 3 Gruppen associierter Punkte eines Gebüsches eine Fläche desselben gelegt werden kann. — Es gibt im Ganzen 15 Einteilungen in solche Gruppen.

§ 15. Unterart.*)

Die Regelflächen R_5 des Strahlensystems 3ter Ordnung und 2ter Klasse besitzen i. Allg. je eine Doppelerzeugende. Die Doppelstrahlen des Systems bilden ein Strahlenbüschel 1ten Grades mit dem Mittelpunkte S und der Ebene D. Von S aus geht an irgend eine R_5 ein Tangentialkegel T 3ter Klasse. Jede seiner Tangentialebenen enthält mehr als 2 Strahlen, einen Doppelstrahl und eine Erzeugende von R_5; sie sind daher singuläre Ebenen. Von den 3 Tangentialebenen, welche durch einen Punkt P im Raume gehen, enthält jede einen der 3 Strahlen durch P. Auf einer Berührungsebene von T geht somit durch jeden Punkt ein Strahl. Die Strahlen auf ihr bilden einen Strahlenbüschel 1ter Ordnung mit dem Mittelpunkt auf einem Doppelstrahl. Die singulären Punkte des Systems bilden also eine Kurve C_2 auf D. Sie ist vom 2ten Grade, da in jeder Ebene 2 Strahlen liegen und jeder derselben durch einen singulären Punkt geht. Die Regelflächen R_5 schneiden sich alle in einer einfachen Kurve 2ten Grades. Die Ebene D enthält von jeder R_5 ausser der Doppelerzeugenden noch einen einfachen Strahl. Alle diese Strahlen bilden auf D ein Strahlenbüschel 1ten Grads. Die 2 Punkte, in welchen ein Strahl s des Büschels die Kurve C_2 trifft, sind Mittelpunkte von Strahlenbüscheln des Systems, deren Ebenen durch D gehen. Da in jeder von D verschiedenen Ebene durch s nur noch ein Strahl liegt und s im Allgemeinen nicht durch S geht, so liegt nur eines dieser Strahlenbüschel in einer von D verschiedenen Ebene. Der Kegel T hat D zur Tangentialebene. Die beiden Tangenten der Kurve C_2 sind Mantellinien des Kegels T. Dies folgt daraus, dass C_2 Kurve einer Regelfläche (R_5) ist, welche T als Tangentialkegel hat. — Fällt der Punkt S selbst auf C_2, so ist D doppelte Tangentialebene von T. Die Punkte

*) Kummer a. a. O. Satz XIII.

von C_2 sind eindeutig auf die Ebenen von T bezogen. Das Geschlecht von T ist 0. Man ersieht dies auch aus dem Ausdrucke für Grad und Klasse der Brennfläche. Der Grad ist hier 4 und die Klasse 2.

Das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 1$, welches einen Büschel 1ten Grades von Doppelstrahlen besitzt, ist ein Teil des Strahlensystems 4ter Klasse und 6ter Ordnung, das aus allen Strahlen besteht, welche in den Ebenen eines Büschels 3ter Ordnung durch einen Punkt mit einer Kurve C_2 2ten Grades gehen (die Geraden in der Ebene von C_2 abgerechnet). C_2 selbst liegt in einer Ebene des Büschels und wird von dem Kegel 3ter Klasse und 4ten Grades, welchen die Ebenen des Büschels einhüllen, zweimal berührt. Der Strahlenbüschel der Doppelstrahlen hat die Spitze des Kegels zum Mittelpunkt.

II. Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 2$.*)

§ 16.

Die Regelflächen R_5 besitzen i. Allg. eine doppelte Raumkurve dritter Ordnung, welche die zugehörige g in 2 Punkten schneidet. Dem Strahlensysteme gehört ein Nullsystem von der 5ten Ordnung und 3ten Klasse zu. Allgemein besitzt ein Strahlensystem Σ^n von der n^{ten} Ordnung und 2ten Klasse, dessen Art ϱ ihren höchsten Wert, $n - 1$ hat, ein zugehöriges Nullsystem vom Grade $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ und der Klasse n. 2 Flächen φ_ε und φ_{ε_1}, welche in dem Nullsysteme den Ebenen ε und ε_1 entsprechen, werden von den Ebenen eines Büschels der Ordnung n^2 gemeinsam berührt. In diesem Büschel ist ein Büschel von der Ordnung $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ enthalten, welches dem Schnitt von ε mit ε_1 entspricht. Die übrigen Ebenen verteilen sich auf ein Büschel singulärer Ebenen von Σ^n und auf Büschel 1ter

*) Kummer a. a. O. In Satz XIV. Es findet sich hier ein spezieller Fall der reciproken Strahlensysteme dieser Art.

Ordnung durch Doppelstrahlen. Jede Regelfläche $R_n + 2$, welche einer Geraden g auf ε zugehört, hat mit der Fläche φ_ε ein Büschel T gemeinsamer Tangentialebenen von der Ordnung $n(n+2)$. T besteht offenbar aus dem Büschel der Doppelebenen von $R_n + 2$, den beiden Büscheln 1ter Ordnung durch die Strahlen von Σ^n auf ε und dem Büschel der singulären Ebenen. Letzterer ist daher von der Ordnung:

$$n(n+2) - (n-1)(n+2) - 2 = n$$

Als Rest bei dem Büschel der gemeinsamen Tangentialebenen von φ_ε und φ_{ε_1} bleiben also noch $n^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ $- n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Büschel 1ter Ordnung. Dies ist die Anzahl der Doppelstrahlen im Systeme. — Jede Ebene des Büschels E^n der singulären Ebenen enthält ein Strahlenbüschel 1ter Ordnung und einen einzelnen Strahl, der i. Allg. nicht durch den Mittelpunkt des Büschels geht; es ist dies der Träger der Punktreihe, welche im Nullsystem der singulären Ebene entspricht. Da in jeder Ebene des Raums 2 Strahlen liegen und auf jedem derselben i. Allg. ein singulärer Punkt — die einfach unendlich vielen Träger jener Punktreihen machen hievon eine Ausnahme, auf jedem derselben liegen 2 singuläre Punkte —, so bilden die singulären Punkte eine Kurve C_2 2ten Grades. Die Ebene γ von C_2 enthält von jeder $R_n + 2$ noch n Erzeugende; zerfällt nämlich die Kurve, in welcher $R_n + 2$ von einer Ebene geschnitten wird, so enthält sie nur eine eigentliche Kurve als Teil. Die Strahlen in γ bilden einen Büschel n^{ter} Ordnung. Die Ebenen von E^n sind durch jede $R_n + 2$ den Punkten von C_2 zugeordnet. E^n ist vom Geschlechte 0 (d. h.: jeder ebene Schnitt des Büschels hat das Geschlecht 0). Es folgt dies aus der Anzahl der Doppelstrahlen. Von den 2n Ebenen des Büschels E^n, welche C_2 berühren, fallen je 2 zusammen. Der Grund hievon ist im vorigen Abschnitt angegeben.

Für das Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art $\varrho = 2$ folgt hieraus: Die Strahlen des Systems schneiden eine Kurve C_2 2ten Grades und liegen in den Ebenen eines Büschels E^3 3ter Ordnung. Die Punkte von C_2 sind eindeutig

den Ebenen von E^3 zugeordnet, so dass jeder Punkt auf seiner entsprechenden Ebene liegt. Die developpable Fläche von E^3 ist vom 4ten Grade. Die 6 Ebenen von E^3, welche C_2 berühren, bilden 3 Paare zusammenfallender Ebenen. Ein besonderer Fall ist der, in welchem C_2 von sämtlichen Ebenen von E^3 berührt wird.

Umgekehrt können wir zeigen, dass die Strahlen, welche eine Kurve C_2 2ten Grades schneiden und in den Ebenen eines Büschels E^3 3ter Ordnung liegen, unter andern Strahlensystemen auch ein Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse bilden, wofern die Ebenen von E^3, welche C_2 berühren, je zu zweien zusammenfallen.

I. Die Ebenen von E^3 sollen nicht durch einen Punkt gehen. — Eine Ebene η von E^3 schneidet die übrigen des Büschels in einem Strahlenbüschel 2ter Ordnung K_2. Ordnen wir die 3 Punkte, in welchen C_2 von Ebenen des Büschels E^3 berührt wird, den Strahlen von K_2 zu, welche diese Ebenen auf η ausschneiden, so ist hiedurch zwischen den Punkten von C_2 und den Strahlen von K_2 eine projektivische Beziehung bestimmt. Durch diese Zuordnung wiederum sind die ebenen Systeme η und γ (Ebene von C_2) reciprok auf einander bezogen. Die Verbindungsebenen entsprechender Elemente erzeugen eine Fläche 2ter Klasse, an welche vom Büschel E^3 6 je zu zweien zusammenfallende Tangentialebene gehen. Ausserdem wird sie von η berührt, so dass ihr der ganze Büschel E^3 umschrieben ist. Die Ebenen von E^3 verbinden daher die Strahlen von K_2 mit den ihnen in obiger Zuordnung entsprechenden Punkten von C_2. Der Büschel E^3 ist somit so auf die Kurve C_2 projektivisch bezogen, dass jede Ebene durch ihren entsprechenden Punkt geht. — Die Strahlen, welche in den Ebenen von E^3 durch ihre entsprechenden Punkte gehen, bilden, wie man sich leicht überzeugt, ein System 3ter Ordnung und 2ter Klasse. Die übrigen Strahlen, welche C_2 schneiden und in Ebenen von E_3 liegen, bilden ein System 3ter Ordnung und 4ter Klasse.

II. E^3 sei ein Büschel durch einen Punkt. Wir haben hier nur den Schnitt von γ mit dem Büschel E^3 zu betrachten; er bestehe aus einem Strahlenbüschel S_3 3ter Ordnung mit einem

Doppelstrahl τ. Beziehen wir die Punktreihe auf τ so auf die Punktreihe auf C_2, dass den 3 Punkten, in welchen C_2 von Strahlen des Büschels S_3 berührt wird, die Schnitte dieser Strahlen mit τ entsprechen, dann geht der Strahl von S_3, welcher τ in einem Punkte P schneidet, durch den Punkt auf C_2, welcher P entspricht. Denn die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von τ und C_2 erzeugen einen Büschel S_3' 3ter Ordnung, welcher τ zum Doppelstrahl hat und dessen Enveloppe C_2 in den nämlichen 3 Punkten berührt, wie die Enveloppe von S_3. S_3' hat daher mit S_3 Elemente im Werte von 10 Strahlen gemein und fällt mit ihm zusammen. Hieraus sieht man, dass auch hier zwischen dem Büschel E^3 und der Kurve C_2 eine solche projektivische Beziehung besteht, dass jede Ebene durch ihren entsprechenden Punkt geht. Das Verfahren, welches wir diesmal angewandt haben, hätte auch im Falle I eingeschlagen werden können.

Anmerkung. Schneiden wir im Falle des Strahlensystems n^{ter} Ordnung den Büschel E^n durch γ nach einem Strahlenbüschel n^{ter} Ordnung S_n, so ist dasselbe so auf C_2 bezogen, dass jeder Strahl durch seinen entsprechenden Punkt geht. Es lässt sich zeigen, dass es im Falle $n = 4$ durch jeden Punkt von γ 4 Kegelschnitte von dieser Lagenbeziehung zu S_4 gibt. Für $n = 5$ gibt es zu S_5 nur einen solchen Kegelschnitt — nicht jeder Kegelschnitt, den die Enveloppe von S_4 resp. S_5 in 4 resp. 5 Punkten berührt, ist von der angeführten Beschaffenheit. Bei $n > 5$ müssen die S_5 Bedingungen genügen. Projicieren wir ein Büschel n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Strahl durch einen Ebenenbüschel E von einem Punkte aus und beziehen die Ebenen desselben eindeutig auf die Ebenen einer Geraden g, so erhalten wir durch die Schnitte entsprechender Geraden eine Regelfläche vom $n+1^{ten}$ Grade. Die Projektion der Erzeugenden von einem Punkte der Fläche aus gibt auf γ einen Büschel n^{ter} Ordnung, zu welchem sich ein Kegelschnitt der erwähnten Beschaffenheit findet. Ein jedes S_n von dieser Art muss sich umgekehrt aus einem Büschel mit $(n-1)$-fachem Strahle auf solche Weise konstruieren lassen. Im reciproken Falle lässt sich hieraus leicht die allgemeine Gleichungsform der zu S_n reciproken Kurven n^{ten} Grades finden.

III. Strahlensystem 3ter Ordnung und 2ter Klasse von der Art o.

§ 17.

Die Regelflächen R_5 haben ausser der dreifachen Geraden noch eine doppelte Leitgerade.

Liegen in einem Strahlensysteme 3ter Ordnung und 3ter Klasse die Strahlen, welche durch einen Punkt gehen, in einer Ebene und umgekehrt, so ist jeder Ebene ein Punkt und jedem Punkte eine Ebene eindeutig zugeordnet. Ebenso entspricht, wie man an den Regelflächen R_6 sehen kann, jeder Geraden g eine Gerade g' (zweite Leitgerade von R_6).

Die Strahlen des Systems sind Strahlen eines gewöhnlichen Nullsystems. In unserem Falle gibt es Ebenen, denen unendlich viele Punkte entsprechen und umgekehrt. Das Nullsystem ist ein spezielles. Die Direktrix desselben ist die doppelte Leitgrade von R_5.

Legen wir durch eine Erzeugende von R_5 eine Ebene, so besitzt ihre Schnittkurve C_4 im Schnitt P mit g einen Doppelpunkt. Durch g gehen 6 Tangentialebenen an C_4, welche die Kurve nicht in P berühren, durch die Direktrix gehen deren 8, welche C_4 nicht in ihrem Punkte auf der Direktrix tangiren. — Die Brennfläche des Systems besteht aus einer Fläche 8ten Grades und 6 Punkten auf der Direktrix.

Die Strahlen in jeder Ebene durch die Direktrix bilden einen Strahlenbüschel 3ter Klasse, welchem die Direktrix angehört. Die Strahlen durch einen Punkt der Direktrix bilden eine Kegelfläche 2ten Grads. —

Die Strahlen des Systems*) berühren eine Fläche n^{ter} Klasse und 8ten Grades und schneiden eine (n — 2)-fache Axe derselben. Hat die Fläche b Axen mit Doppeltangentialebenen und c mit stationären Tangentialebenen, so besteht die Gleichung:

$$n(n-1) - 2(n-2) - 3c - 2b = 3.$$

Die c und b Axen müssen die (n — 2)-fache Axe schneiden.

Unterarten.**)

I. R_5 besitze eine Doppelerzeugende. Die Doppelstrahlen bilden einen Strahlenbüschel 1ter Ordnung. Die Strahlen des Systems berühren einen Kegel 3ter Klasse und schneiden eine Tangente desselben.

---

*) Kummer a. a. O. Satz. XV.

**) Kummer a. a. O. Satz X.

II. R_5 besitze zwei Doppelerzeugende. Die Doppelstrahlen bilden eine Regelfläche 2ten Grades und sind Axen eines Ebenenbüschels 3ter Ordnung, dessen Ebenen nicht durch einen Punkt gehen. Die Strahlen des Systems liegen in den Ebenen dieses Büschels und schneiden eine Gerade in derselben.

Zerfällt die Regelfläche der Doppelstrahlen in 2 ebene Strahlenbüschel, so schneiden sich die Ebenen des Büschels in einem Punkte und die Gerade, welche von allen Strahlen des Systems geschnitten wird, liegt in einer Doppelebene des Büschels.

Bolheim, im Juni 1885.